# UN BAMBINO PRODIGIO

Verso la fine del Settecento, in una scuola elementare di Brunswick, città tedesca della Bassa Sassonia (oggi Braunschweig), un maestro di nome Büttner decise di tenere buoni i suoi giovanissimi allievi assegnando loro un compito semplice ma tedioso: sommare tutti i numeri interi da 1 fino a 100. Gli andò male perché, dopo pochi minuti, un bambino di dieci anni si alzò in piedi e diede la risposta esatta: 5.050.

Büttner pensò che stesse scherzando e a quanto pare, lo rimproverò (egli stesso non conosceva il risultato). Come aveva fatto? La spiegazione del bambino fu abbastanza semplice, doveva infatti eseguire le seguenti operazioni:

$$S_n = 1+2+3+4+5+.......+95+96+97+98+99+100$$

Il bambino, invece di svolgere le novantanove somme, notò che la somma fra il primo e l'ultimo numero era pari a 101, così come la somma fra 2 e 99, 3 e 98, 4 e 97 e così via fino a 50 e 51. Pertanto egli dedusse che con 100 numeri si possono costruire 50 coppie di numeri la cui somma è pari a 101 e quindi ricavò il risultato:

$$50 \cdot 101 = 5050$$

Generalizziamo il problema. Sia dato un numero intero pari che indicheremo con $n$, si possono allora formare $n/2$ coppie la cui somma è pari a $n+1$, pertanto possiamo scrivere che la somma dei primi interi da 1 a $n$ con $n$ pari vale:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e se $n$ è dispari? Se $n$ è dispari allora il numero $n$-1 è pari e possiamo applicare l'espressione precedente per determinare la somma dei primi $n$-1 numeri alla quale va poi aggiunto il termine $n$-esimo, cioè:

$$S_n = \frac{(n-1)n}{2} + n$$

con opportuni passaggi si ha:

$$S_n = \frac{(n-1)n+2n}{2} = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

In altre parole l'espressione trovata è valida per ogni numero intero $n$ sia esso pari o dispari.

Con questa formula è possibile calcolare anche la somma di tutti i numeri pari fino ad $n$, infatti se dobbiamo determinare:

$$S_n = 2+4+6+8+\ldots+n$$

possiamo scrivere:

$$S_n = 2\left(1+2+3+4+\ldots+\frac{n}{2}\right) = 2\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} = \frac{n(n+2)}{4}$$

E se dobbiamo calcolare la somma di tutti i numeri dispari fino a *n*? Possiamo risolvere il problema calcolando la somma di tutti gli interi fino ad *n* e sottrarre con la relazione precedente la somma di tutti i numeri pari fino ad *n*-1:

$$S_n = 1+3+5+7+\ldots+n = (1+2+3+\ldots+n)-(2+4+6+\ldots+n-1)$$

ovvero:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-1+2)}{4} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2-1}{4} = \frac{2n^2+2n-n^2+1}{4}$$

e in definitiva si ha:

$$S_n = \frac{(n+1)^2}{4}$$

Riepilogando abbiamo ricavato il termine *n*-esimo delle seguenti serie:

$$S_n = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

$$S_n = 2+4+6+\ldots+n = \frac{n(n+2)}{4} \qquad (2)$$

$$S_n = 1+3+5+\ldots+n = \frac{(n+1)^2}{4} \qquad (3)$$

Attenzione, le tre espressioni precedenti forniscono rispettivamente la somma dei primi interi fino ad *n*, la somma dei primi pari fino ad *n* ed infine la somma dei primi dispari fino ad *n*.

In realtà quando si parla di somma di una serie, *n* fa riferimento al termine *n*-esimo della serie cioè le espressioni trovate dovrebbero fornire la somma dei primi *n* interi, la somma dei primi *n* pari e la somma dei primi *n* dispari.

Questo non influisce sull'espressione (1), ma cambia sia la (2), dove *n* va sostituito con *2n*, che la (3) dove *n* va sostituito con *2n-1*; cosicché le tre espressioni vanno riscritte nel modo seguente:

$$S_n = \underbrace{1+2+3+\ldots}_{n} = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

$$S_n = \underbrace{2+4+6+\ldots}_{n} = \frac{2n(2n+2)}{4} = n(n+1) \tag{5}$$

$$S_n = \underbrace{1+3+5+\ldots}_{n} = \frac{((2n-1)+1)^2}{4} = n^2 \tag{6}$$

Un'ultima osservazione. La (6) mostra una particolarità dei numeri, "*la somma dei primi n dispari è pari al quadrato di n*", cioè:

$$S_1 = 1 = 1^2$$

$$S_2 = 1+3 = 4 = 2^2$$

$$S_3 = 1+3+5 = 9 = 3^2$$

e così via.

A proposito, quel bambino non era un bambino qualsiasi, si chiamava Carl Friedrich Gauss (1777-1855), che diventò un grande matematico.

Pensate che all'età di diciannove anni riuscì a scoprire un metodo grafico per costruire tutti i poligoni regolari con un numero di lati pari a $2^{2n}+1$. Nella sua vita si occupò di aritmetica, analisi, elettrologia, astronomia, geodesia (studio della forma e delle dimensioni della Terra) e meccanica.

Pubblicò circa 155 volumi sugli studi da esso compiuti; inventò un magnetometro ed un telegrafo ottico e a filo. Morì a 78 anni il 23 febbraio 1855 a Gottinga.