

## UNA MEMORIA FORMIDABILE

Qualche tempo fa un alunno mi propose un gioco che doveva mettere in evidenza la sua memoria formidabile. Dapprima mi chiese di pensare ad un numero compreso tra 1 e 100 e successivamente mi mostrò alcune cartelle in cui erano stampati casualmente dei numeri in ordine crescente sempre nello stesso intervallo; a quel punto mi chiese di indicare in quali cartelle il numero da me pensato fosse presente e non appena risposi l'alunno immediatamente lo indovinò.

Inizialmente rimasi stupito dalla velocità della risposta ma nello stesso tempo non riuscii a credere che quell'alunno avesse una memoria tale da ricordare tutti quei numeri in base alla loro presenza o meno nelle varie cartelle.

Immaginai vi fosse qualche trucco e cominciai ad osservare con attenzione le cartelle; dopo un certo tempo capii finalmente la tecnica con cui i numeri erano stati disposti nelle cartelle.

Ho trovato davvero interessante quel gioco e voglio proporvelo fornendovi anche la spiegazione matematica; anzi ho voluto crearne una variante più complessa in modo da depistare anche l'occhio più attento.

Alla fine di questo articolo troverete delle tavole che potrete stampare e così stupire gli amici con la vostra *Memoria Formidabile*.

La risposta a quel trucco si trova nella *rappresentazione binaria* di un numero. In genere quando rappresentiamo un numero usiamo la *base decimale* che consiste nell'usare i dieci simboli 0, 1, 2, ..., 9 (chiamati *cifre*) ai quali viene assegnato un peso (*valore*). Quando il numero da rappresentare non è esprimibile attraverso una sola cifra allora se ne aggiunge un'altra a sinistra della prima ottenendo così numeri a due cifre per un totale di cento combinazioni, se poi il numero da rappresentare è ancora più grande se ne usano tre e così via fino ad ottenere infinite possibilità.

I numeri 362 e 623 pur usando le stesse cifre hanno valori diversi in quanto la rappresentazione è *posizionale*, cioè il valore della cifra dipende dalla posizione in cui si trova.

Formalmente possiamo scrivere che un numero  $N$  è dato da:

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot 10^k = c_0 \cdot 10^0 + c_1 \cdot 10^1 + c_2 \cdot 10^2 + \dots + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} \quad (1)$$

dove i  $c_k$  sono le  $n$  cifre che costituiscono il numero.

Per esempio il numero  $N = 362$  di tre cifre si può scrivere:

$$362 = 2 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 = 2 + 60 + 300 \quad (2)$$

Oltre a quella decimale si possono usare altre basi che contengono un numero di cifre maggiore o minore di dieci. Nel caso il numero di cifre sia inferiore a dieci per comodità si usano gli stessi simboli della base decimale, se invece le cifre sono in numero maggiore di dieci è necessario introdurre nuovi simboli. Per esempio nel sistema *esadecimale* (a base 16) oltre ai soliti dieci simboli 0, 1, ..., 9 si usano le lettere A, B, C, D, E ed F ai quali vengono assegnati rispettivamente i valori 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

Ad esempio il numero  $N = (3A6F)_{16}$  vale:

$$(3A6F)_{16} = 15 \cdot 16^0 + 6 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^3 = (14959)_{10} \quad (3)$$

In generale possiamo dire che per rappresentare attraverso la (1) un numero  $N$  in una determinata base  $b$ , useremo  $b$  simboli  $c_k$  con  $0 \leq c_k \leq b-1$ , cioè:

$$N = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \cdot b^k = c_0 \cdot b^0 + c_1 \cdot b^1 + c_2 \cdot b^2 + \dots + c_{n-1} \cdot b^{n-1} \quad (4)$$

La rappresentazione più semplice è quella binaria, cioè quella che usa un sistema di numerazione a base 2 con cifre 0 e 1 ed è usata negli elaboratori, calcolatrici, microprocessori ecc.

Ad esempio il numero  $N = (101101)_2$  vale 45 nella base 10, infatti:

$$(101101)_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 4 + 8 + 32 = (45)_{10} \quad (5)$$

Nel sistema di numerazione a base 10 sappiamo inoltre che con tre cifre, ad esempio, si possono rappresentare 1000 numeri i cui valori sono compresi tra 0 e 999, cioè fissato un certo numero  $N$  di cifre, è possibile rappresentare  $10^N$  valori compresi tra  $0 \div 10^N - 1$ . Analogamente in base 2 con  $N$  cifre si potranno rappresentare  $2^N$  valori compresi tra  $0 \div 2^N - 1$ .

Supponiamo di avere quattro cifre binarie, cioè  $N = 4$  e riportiamo in tabella le varie combinazioni ordinate secondo le potenze crescenti di 2, si ha:

n.	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Costruiamo ora quattro cartelle, una per ogni colonna delle potenze di 2, contenenti i numeri decimali che hanno in corrispondenza un segno “1” nella colonna considerata, si ha:

$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
8	4	2	1
9	5	3	3
10	6	6	5
11	7	7	7
12	12	10	9
13	13	11	11
14	14	14	13
15	15	15	15

Possiamo osservare due cose:

- Il primo numero di ogni cartella è pari alla potenza corrispondente (es.  $2^3 = 8$ ).
- Un numero è presente nella cartella solo se nella sua rappresentazione la potenza relativa è moltiplicata per un fattore "1" (es.  $5 = 2^2 + 2^0 = 4 + 1$ )

In definitiva una volta pensato il numero, in questo caso dovrà essere compreso tra 1 e 15, per scoprirlo è sufficiente farsi indicare in quali cartelle si trova (possono anche essere mostrate in modo casuale) sommando a mente i primi numeri di ogni cartella quando la risposta è affermativa.

Ad esempio se il numero da indovinare è il 13, le cartelle contenenti tale numero saranno quelle che cominciano con 8, 4 ed 1; quindi  $8 + 4 + 1 = 13$ .

Se vogliamo estendere il gioco ad un numero massimo più grande bisogna costruire tante cartelle quanti sono le cifre necessarie per la rappresentazione del numero più grande. Ad esempio se il gioco si estende nell'intervallo  $1 \div 100$  avremo bisogno di  $N$  cartelle tali che:

$$2^N - 1 \geq 100 \quad (6)$$

cioè

$$N \geq \log_2 101 = 6,658... \quad (7)$$

Il più piccolo valore intero che soddisfa la (7) è

$$N = 7 \quad (8)$$

cioè dovremo costruire sette cartelle.

Vediamo se è possibile estendere il gioco con una base diversa da quella binaria. Supponiamo di usare un sistema a base 3: in tal caso la questione si complica apparentemente in quanto i fattori moltiplicativi delle potenze di tre sono 0, 1 e 2.

Per semplicità immaginiamo di usare tre cifre in base 3, cioè  $N = 3$ ; si hanno così  $3^N = 27$  combinazioni per rappresentare tutti i numeri compresi nell'intervallo  $0 \div 26$ . Costruiamo, come fatto in precedenza, una tabella di tutte le combinazioni possibili.

n.	$3^2$	$3^1$	$3^0$
	9	3	1
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	0	2
3	0	1	0
4	0	1	1
5	0	1	2
6	0	2	0
7	0	2	1
8	0	2	2
9	1	0	0
10	1	0	1
11	1	0	2
12	1	1	0
13	1	1	1
14	1	1	2
15	1	2	0
16	1	2	1
17	1	2	2
18	2	0	0
19	2	0	1
20	2	0	2
21	2	1	0
22	2	1	1
23	2	1	2
24	2	2	0
25	2	2	1
26	2	2	2

Questa volta dobbiamo costruire due cartelle per ogni potenza di 3, per un totale di sei cartelle, a seconda se il fattore moltiplicativo vale “2” o “1” rispettivamente. Le cartelle, anche in questo caso, conterranno il rispettivo valore decimale.

$3^2$	$3^2$	$3^1$	$3^1$	$3^0$	$3^0$
18	9	6	3	2	1
19	10	7	4	5	4
20	11	8	5	8	7
21	12	15	12	11	10
22	13	16	13	14	13
23	14	17	14	17	16
24	15	24	21	20	19
25	16	25	22	23	22
26	17	26	23	26	25

Per analogia col caso binario possiamo dire:

- Il primo numero di ogni cartella è pari alla potenza corrispondente moltiplicata per il relativo fattore moltiplicativo (es.  $2 \cdot 3^2 = 18$  oppure  $1 \cdot 3^2 = 9$ ).
- Un numero è presente nella cartella solo se nella sua rappresentazione la potenza relativa è moltiplicata per il fattore corrispondente (ad esempio il numero  $17 = 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 9 + 6 + 2$ ).

In definitiva usando la base 3, si opera in maniera analoga a quanto fatto per quella binaria: si invita un giocatore a pensare, in questo caso, un numero compreso tra 1 e 26 e di indicare in quali cartelle si trova; sommando le prime cifre delle cartelle selezionate otterrete il numero pensato.

In allegato a questo documento, troverete due gruppi di cartelle, il primo usa sette tavole, lavora in base binaria e permette di scegliere un numero compreso tra 1 e 100; il secondo gruppo contenente dieci tavole è stato realizzato in base ternaria e permette di scegliere numeri compresi tra 1 e 200.

Potete stamparle e ritagliarle ma vi consiglio di esercitarvi mnemonicamente a fare i calcoli prima di proporre il gioco ai vostri amici e mostrar loro la vostra memoria formidabile.

Buon divertimento.

[www.carlocalo.it](http://www.carlocalo.it)

64 65 66 67 68 69

70 71 72 73 74 75

76 77 78 79 80 81

82 83 84 85 86 87

88 89 90 91 92 93

94 95 96 97 98 99

100

32 33 34 35 36 37

38 39 40 41 42 43

44 45 46 47 48 49

50 51 52 53 54 55

56 57 58 59 60 61

62 63 96 97 98 99

100

16 17 18 19 20 21

22 23 24 25 26 27

28 29 30 31 48 49

50 51 52 53 54 55

56 57 58 59 60 61

62 63 80 81 82 83

84 85 86 87 88 89

90 91 92 93 94 95

8 9 10 11 12 13 14

15 24 25 26 27 28

29 30 31 40 41 42

43 44 45 46 47 56

57 58 59 60 61 62

63 72 73 74 75 76

77 78 79 88 89 90

91 92 93 94 95

4 5 6 7 12 13 14 15

20 21 22 23 28 29

30 31 36 37 38 39

44 45 46 47 52 53

54 55 60 61 62 63

68 69 70 71 76 77

78 79 84 85 86 87

92 93 94 95 100

2 3 6 7 10 11 14 15

18 19 22 23 26 27

30 31 34 35 38 39

42 43 46 47 50 51

54 55 58 59 62 63

66 67 70 71 74 75

78 79 82 83 86 87

90 91 94 95 98 99

1 3 5 7 9 11 13 15

17 19 21 23 25 27

29 31 33 35 37 39

41 43 45 47 49 51

53 55 57 59 61 63

65 67 69 71 73 75

77 79 81 83 85 87

89 91 93 95 97 99

162 163 164 165 166 167 168

169 170 171 172 173 174 175

176 177 178 179 180 181 182

183 184 185 186 187 188 189

190 191 192 193 194 195 196

197 198 199 200

81 82 83 84 85 86 87 88 89 90

91 92 93 94 95 96 97 98 99

100 101 102 103 104 105 106

107 108 109 110 111 112 113

114 115 116 117 118 119 120

121 122 123 124 125 126 127

128 129 130 131 132 133 134

135 136 137 138 139 140 141

142 143 144 145 146 147 148

149 150 151 152 153 154 155

156 157 158 159 160 161

54 55 56 57 58 59 60 61 62 63

64 65 66 67 68 69 70 71 72 73

74 75 76 77 78 79 80 135 136

137 138 139 140 141 142 143

144 145 146 147 148 149 150

151 152 153 154 155 156 157

158 159 160 161

27 28 29 30 31 32 33 34 35 36

37 38 39 40 41 42 43 44 45 46

47 48 49 50 51 52 53 108 109

110 111 112 113 114 115 116

117 118 119 120 121 122 123

124 125 126 127 128 129 130

131 132 133 134 189 190 191

192 193 194 195 196 197 198

199 200

18 19 20 21 22 23 24 25 26 45

46 47 48 49 50 51 52 53 72 73

74 75 76 77 78 79 80 99 100

101 102 103 104 105 106 107

126 127 128 129 130 131 132

133 134 153 154 155 156 157

158 159 160 161 180 181 182

183 184 185 186 187 188

9 10 11 12 13 14 15 16 17 36

37 38 39 40 41 42 43 44 63 64

65 66 67 68 69 70 71 90 91 92

93 94 95 96 97 98 117 118 119

120 121 122 123 124 125 144

145 146 147 148 149 150 151

152 171 172 173 174 175 176

177 178 179 198 199 200

6 7 8 15 16 17 24 25 26 33 34

35 42 43 44 51 52 53 60 61 62

69 70 71 78 79 80 87 88 89 96

97 98 105 106 107 114 115

116 123 124 125 132 133 134

141 142 143 150 151 152 159

160 161 168 169 170 177 178

179 186 187 188 195 196 197

3 4 5 12 13 14 21 22 23 30 31

32 39 40 41 48 49 50 57 58 59

66 67 68 75 76 77 84 85 86 93

94 95 102 103 104 111 112

113 120 121 122 129 130 131

138 139 140 147 148 149 156

157 158 165 166 167 174 175

176 183 184 185 192 193 194

2 5 8 11 14 17 20 23 26 29 32

35 38 41 44 47 50 53 56 59 62

65 68 71 74 77 80 83 86 89 92

95 98 101 104 107 110 113

116 119 122 125 128 131 134

137 140 143 146 149 152 155

158 161 164 167 170 173 176

179 182 185 188 191 194 197

200

1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31

34 37 40 43 46 49 52 55 58 61

64 67 70 73 76 79 82 85 88 91

94 97 100 103 106 109 112

115 118 121 124 127 130 133

136 139 142 145 148 151 154

157 160 163 166 169 172 175

178 181 184 187 190 193 196

199