

Problema

Un recipiente a base quadrata di lato $l = 40\text{ cm}$ deve contenere delle sfere d'acciaio, aventi diametro $D = 10\text{ cm}$, immerse in un olio lubrificante.

Quante sfere possono essere completamente coperte da 200 litri di olio?



Questo quesito può trarre in inganno chiunque se non si analizza bene il problema. Infatti se consideriamo il volume occupato da una singola sfera si avrebbe:

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \pi\frac{D^3}{6} \quad (1)$$

essendo $D = 10\text{ cm} = 1\text{ dm}$, la (1) da:

$$V_{sfera} = \frac{\pi}{6}\text{ litri} \quad (2)$$

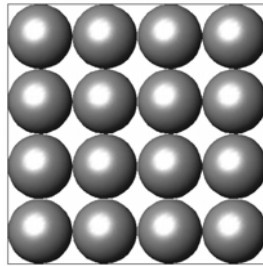


fig. 1 – Disposizione sfere in strati da 16

disponendo le sfere in file di 4x4 (fig. 1), si avrebbe per ogni strato un volume di olio pari a:

$$V_{olio} = V_{recipiente} - 16 \cdot V_{sfera} = 16 - 16 \cdot \frac{\pi}{6} = 16\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)\text{ litri} \quad (3)$$

con 200 litri di olio si riuscirebbero a coprire quindi:

$$N_{strati} = \text{int} \left(\frac{200}{16 \left(1 - \frac{\pi}{6} \right)} \right) = 26 \quad (4)$$

a cui corrispondono:

$$N_{sfere} = 16 \cdot N_{strati} = 416 . \quad (5)$$

In realtà è possibile una diversa disposizione delle sfere alternando strati da 16 con strati da 9. Si perdono così 7 sfere negli strati pari ma si guadagna in altezza a causa del posizionamento di ogni sfera nella parte compresa fra le quattro sottostanti (fig. 2).

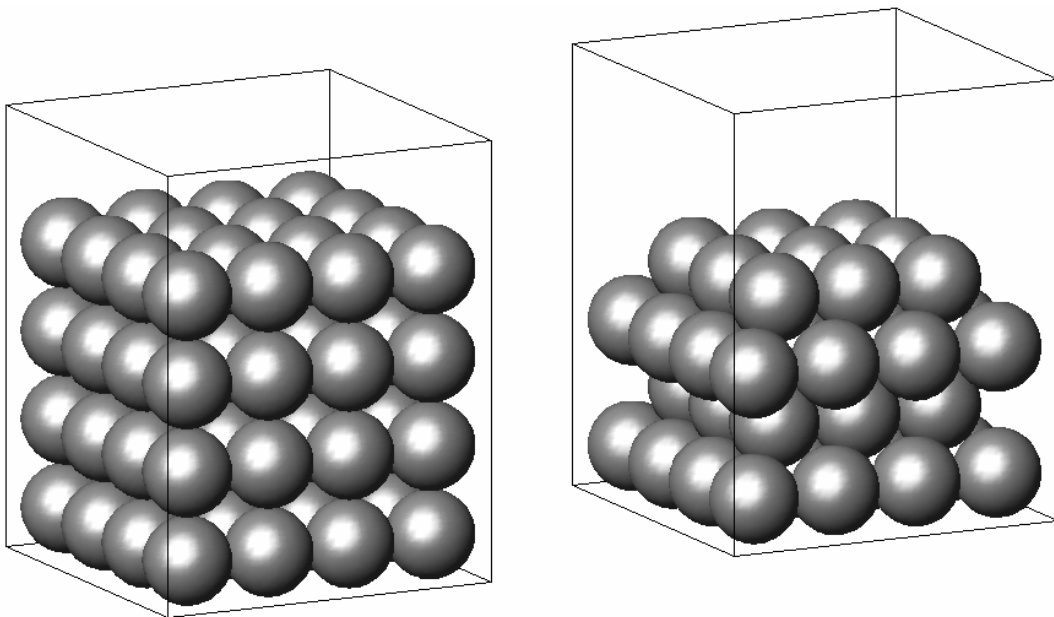


fig. 2 – Disposizioni possibili delle sfere

Dobbiamo verificare se questa seconda disposizione è conveniente in base alle richieste del problema.

Nella prima disposizione, ogni strato ha un'altezza di 10cm , nel secondo caso invece dobbiamo determinare la distanza ortogonale al piano orizzontale fra i centri di due sfere giacenti su strati contigui.

Osservando la fig. 3, si comprende che i centri di cinque sfere si trovano sui vertici di una piramide a base quadrata di spigoli aventi lunghezza pari a 10 cm .

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ADC , si ricava un'altezza:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ cm} . \quad (6)$$

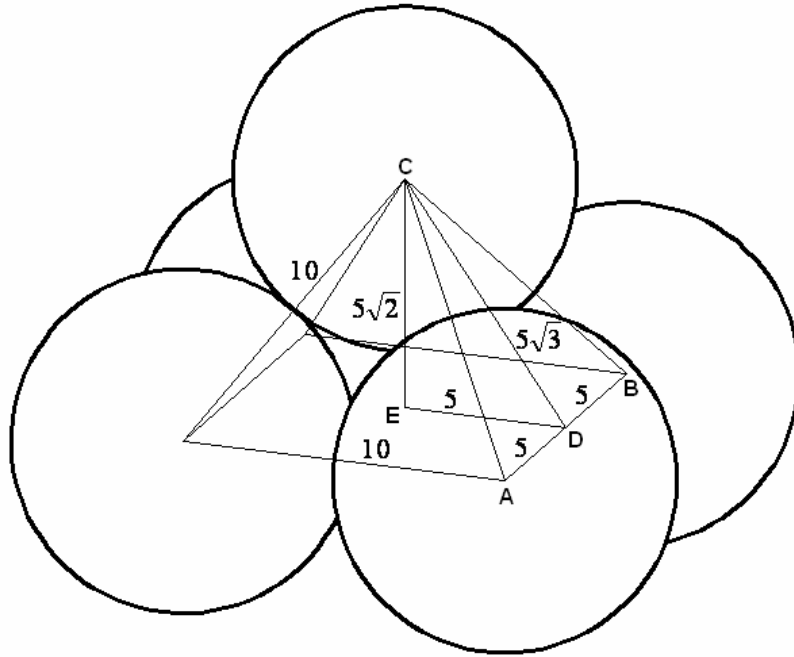


fig. 3 – Piramide con vertici nei centri delle sfere

Noto il lato CD , in modo analogo si ricava il lato CE del triangolo CED :

$$CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ cm} \quad (7)$$

che corrisponde alla distanza fra due piani di sfere nella disposizione a strati alternati 16 e 9 di fig. 2.

Se ipotizziamo di riempire il recipiente all'inizio con uno strato di 16 sfere, si avrà una situazione come quella rappresentata in fig. 4. Cioè, ad un primo strato di altezza 5 cm formato da 16 semisfere, seguiranno ulteriori strati intermedi alti $5\sqrt{2}\text{ cm}$ costituiti da

25 semisfere, per concludere con uno strato sempre alto 5cm e formato da 9 o 16 semisfere a seconda se il numero totale degli strati sia pari o dispari rispettivamente.

Si ha dunque:

Primo Strato

$$V_{olioPS} = V_{recipiente} - \frac{16}{2} \cdot V_{sfera} = 16 \cdot 0,5 - 8 \cdot \frac{\pi}{6} = 8 - \frac{4}{3} \pi \text{ litri} \quad (8)$$

Strato Successivo

$$V_{olioSS} = V_{recipiente} - \frac{25}{2} \cdot V_{sfera} = 16 \cdot 0,5\sqrt{2} - \frac{25}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = 8\sqrt{2} - \frac{25}{12} \pi \text{ litri} \quad (9)$$

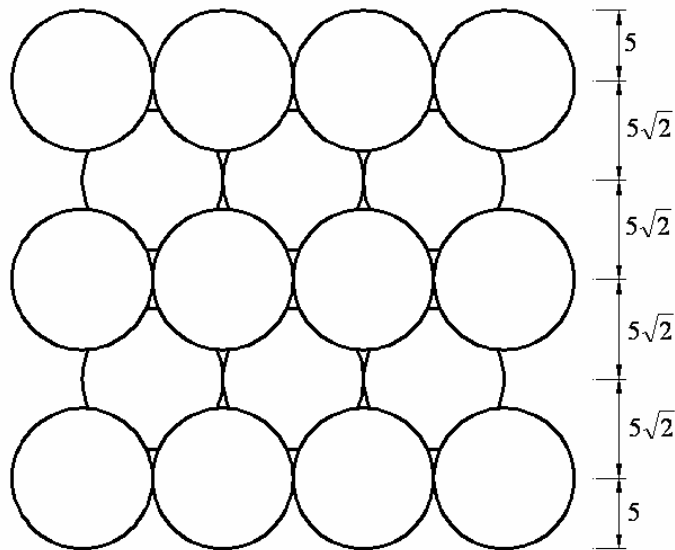


fig. 4 – Distanze ortogonali fra i centri delle sfere

Ultimo Strato

$$V_{olioUS(npari)} = V_{recipiente} - \frac{9}{2} \cdot V_{sfera} = 16 \cdot 0,5 - \frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = 8 - \frac{9}{12} \pi \text{ litri} \quad (10)$$

oppure

$$V_{olioUS(ndispari)} = V_{recipiente} - \frac{16}{2} \cdot V_{sfera} = 16 \cdot 0,5 - 8 \cdot \frac{\pi}{6} = 8 - \frac{4}{3} \pi \text{ litri} \quad (11)$$

Sommando il volume dell'olio del primo e dell'ultimo strato si ha:

$$V_{olioPS+US(npai)} = 16 - \frac{25}{12} \pi \text{ litri} \quad (12)$$

oppure

$$V_{olioPS+US(ndispari)} = 16 - \frac{8}{3} \pi \text{ litri} \quad (13)$$

in definitiva, con 200 litri di olio dovrà essere:

$$(n-1) \cdot V_{olioSS} + V_{olioPS+US} \leq 200 \text{ litri} \quad (14)$$

cioè

$$n \leq \frac{200 - V_{olioPS+US} + V_{olioSS}}{V_{olioSS}} \quad (15)$$

dove n è il numero di strati.

Supponiamo che n sia pari, dalla (15) si ha allora:

$$n \leq \frac{200 - 16 + \frac{25}{12} \pi + 8\sqrt{2} - \frac{25}{12} \pi}{8\sqrt{2} - \frac{25}{12} \pi} = \frac{184 + 8\sqrt{2}}{8\sqrt{2} - \frac{25}{12} \pi} \cong 40,95 \quad (16)$$

e quindi con 200 litri di olio possiamo ricoprire almeno 40 strati a cui corrispondono:

$$N_{sfere} = 20 \cdot 16 + 20 \cdot 9 = 20 \cdot 25 = 500 \quad (17)$$

Se invece supponiamo che n sia dispari, allora la (15) diventa:

$$n \leq \frac{200 - 16 + \frac{8}{3}\pi + 8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi}{8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi} = \frac{184 + 8\sqrt{2} + \frac{7}{12}\pi}{8\sqrt{2} - \frac{25}{12}\pi} \cong 41,34 \quad (18)$$

L'intero dispari più vicino al valore determinato nella (18) è 41 che è maggiore del valore (40) trovato nel caso n fosse pari e fornisce un numero di sfere pari a:

$$N_{sfere} = 21 \cdot 16 + 20 \cdot 9 = 516 \quad (19)$$

Riepilogando con 41 strati di sfere avremo un'altezza complessiva, data da:

$$h_{totale} = 10 + 20 \cdot 10\sqrt{2} = 10(1 + 20\sqrt{2}) \text{ cm} \quad (20)$$

a cui corrisponderà un volume del recipiente uguale a:

$$V_{recipiente} = 16 \cdot h_{totale} = 16(1 + 20\sqrt{2}) \text{ litri} \quad (21)$$

il volume occupato dalle sfere sarà invece:

$$V_{sfere} = N_{sfere} \cdot V_{sfera} = 516 \cdot \frac{\pi}{6} = 86\pi \text{ litri} \quad (22)$$

Quindi il volume dell'olio necessario per coprire tutte le sfere è:

$$V_{olio} = V_{recipiente} - V_{sfere} = 16(1 + 20\sqrt{2}) - 86\pi = 198,37 \text{ litri} \quad (23)$$

La fig. 5 mostra in scala la situazione in entrambi i casi analizzati.

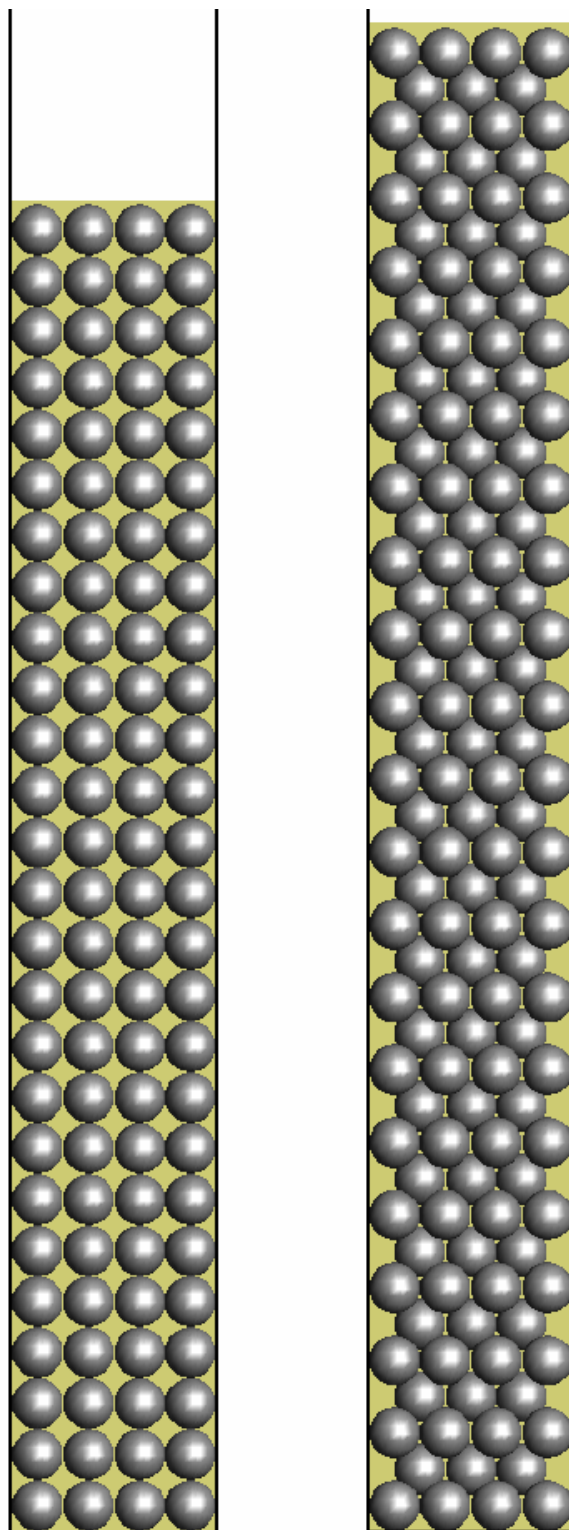


fig. 5 – Sfere immerse in 200 litri di olio

www.carlocalo.it